

Università degli Studi di Verona

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.
Corso di Laurea Triennale in Matematica Applicata

SIMONE PARISOTTO

Il metodo di Galerkin in salsa ellittica e parabolica

Esame di Complementi di Analisi

Anno Accademico 2008–2009

Indice

Capitolo 1. Equazioni a Derivate Parziali	3
Capitolo 2. Analisi Funzionale per EDP	5
1. Spazi di Banach	5
2. Spazi di Hilbert	6
3. Ortogonalità e Proiezioni	6
4. Operatori Lineari	9
5. Problemi Variazionali Astratti	12
6. Equazione di Eulero	14
7. Le distribuzioni	15
8. Gli spazi di Sobolev	16
9. Formulazione Forte e Debole di una EDP	18
10. Approssimazione e metodo di Galerkin	18
Capitolo 3. Il caso parabolico	21
1. Formulazione generale	21
2. L'equazione del Calore	22
Capitolo 4. Un esempio in GNU Octave	29
1. Un problema reale	29
2. Codice GNU Octave	31

Equazioni a Derivate Parziali

Le *equazioni a derivate parziali* (note in letteratura con l'abbreviazione EDP) sono particolari equazioni differenziali contenenti derivate della funzione incognita rispetto a più variabili (temporali o spaziali). Diremo che l'EDP ha ordine q se q è l'ordine massimo delle derivate parziali che compaiono.

Nel nostro caso specifico siamo interessati a EDP di ordine 2 *lineari* (in cui, cioè, l'equazione dipende linearmente dall'incognita u e dalle sue derivate) per cui la formula generale che andremo ad analizzare sarà la seguente:

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} + e \frac{\partial u}{\partial x} + gu = f = Lu$$

dove x, t sono variabili, in generale, in un insieme Ω nel piano e a, b, c, d, e, g, f funzioni regolari ($\in C^2$) sempre in Ω . I termini di secondo ordine

$$(2) \quad a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

formano la forma quadratica chiamata *parte principale*.

Dall'equazione (2) si può associare una forma quadratica in forma matriciale:

$$S^p(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} -a(\mathbf{x}) & -b(\mathbf{x}) \\ -b(\mathbf{x}) & -c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

con, nel nostro caso $\mathbf{x} = (x, t)$ e $\mathbf{q} = (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x})$. La forma quadratica è detta *definita* se la matrice associata ha autovalori tutti dello stesso segno (positivi o negativi); *indefinita* se la matrice ha autovalori di entrambi i segni; *degenere* o *semidefinita* se è singolare (non invertibile). Quindi con particolare riferimento al segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ che classifica le EDP abbiamo:

- a) se $\Delta = (2b)^2 - 4ac > 0$ l'EDP si dice *iperbolica* con $S^p(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ indefinita
- b) se $\Delta = (2b)^2 - 4ac = 0$ l'EDP si dice *parabolica* con $S^p(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ semidefinita
- c) se $\Delta = (2b)^2 - 4ac < 0$ l'EDP si dice *ellittica* con $S^p(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ definita

Alla forma canonica (1) andremo ad associare alle nostre variabili adimensionali delle condizioni particolari sulla frontiera $\partial\Omega$:

- il *problema di Dirichlet* corrisponde alla conoscenza dei valori della soluzione sulla frontiera:

$$u(\boldsymbol{\sigma}, t) = h_1 \text{ con } \boldsymbol{\sigma} \in \partial\Omega \text{ e } t \in [0, T]$$

- il *problema di Neumann* corrisponde alla conoscenza del flusso entrante ed uscente dalla frontiera. Indicato con $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\sigma})$ il versore normale al piano tangente a $\partial\Omega$ nel punto $\boldsymbol{\sigma}$ allora la condizione è

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\sigma}, t) = h_2 \text{ con } \boldsymbol{\sigma} \in \partial\Omega \text{ e } t \in [0, T]$$

- il *problema di Robin* che corrisponde ad assegnare condizioni:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \alpha u = \beta \text{ con } (\alpha > 0)$$

- il *problema misto*:

$$\text{siano } \partial\Omega = \partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega \text{ con } \partial_D\Omega \cap \partial_N\Omega = \emptyset$$

$$u = h_1 \text{ su } \partial_D\Omega, \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = h_2 \text{ su } \partial_N\Omega$$

Inoltre, i valori h_1, h_2, β che risultano essere uguali a 0 si dicono *condizioni omogenee, non omogenee* altrimenti.

Analisi Funzionale per EDP

Questa parte del testo, che sarebbe stato più utile chiamare “Elementi di Analisi Funzionale per EDP”, non ha la pretesa di trattare approfonditamente tutti gli elementi di analisi funzionale ma si limita (in accordo con gli scopi del corso seguito) ad una presentazione degli spazi in cui vengono ambientate le EDP viste. Per i nostri scopi ci limiteremo al caso \mathbb{R} .

1. Spazi di Banach

DEFINIZIONE 2.1 (spazio normato). Sia X uno spazio vettoriale sul campo reale. X si dice *spazio normato* se è dotato di una norma. Una *norma* in X è un’applicazione

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni scalare λ e ogni $x, y \in X$ valgano le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ (annullamento)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (omogeneità)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

DEFINIZIONE 2.2 (spazio metrico). Uno spazio dotato di norma è anche uno *spazio metrico*, con la distanza indotta dalla norma:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

DEFINIZIONE 2.3 (successione di Cauchy). Una successione $\{X_n\}$ si dice *fondamentale* o *di Cauchy* se

$$d(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| \rightarrow 0 \text{ per } m, n \rightarrow \infty$$

DEFINIZIONE 2.4 (successione convergente). Una successione $\{X_n\}$ si dice *convergente* a $x \in X$

$$d(x_m, x) = \|x_m - x\| \rightarrow 0 \text{ per } m \rightarrow \infty$$

DEFINIZIONE 2.5 (spazio completo). Poichè siamo in uno spazio metrico allora una successione $\{X_n\}$ convergente implica $\{X_n\}$ di Cauchy. Se vale anche l’implicazione inversa (ciò non è vero in \mathbb{Q}) allora siamo in uno **spazio metrico completo** noto anche come **spazio di Banach**.

Infatti dalla disuguaglianza triangolare:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x)$$

se $\{x_n\}$ è convergente, i due addendi a destra tendono a 0 e quindi anche $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ per cui $\{x_n\}$ è di Cauchy. Per convincersi che l’implicazione opposta non è sempre vera pensiamo allo spazio metrico \mathbb{Q} dei numeri razionali, con la solita distanza $d(x, y) = |x - y|$, ed alla successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

che è di Cauchy ma converge al numero $e \notin \mathbb{Q}$.

ESEMPIO 2.1. Sia Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^n e p un numero reale con $p \geq 1$. Con il simbolo $L^p(\Omega)$ indichiamo l’insieme delle funzioni *p-sommabili* in Ω secondo Lebesgue, ritenendo due funzioni identiche quando sono uguali quasi ovunque (q.o.) e cioè differiscono su un insieme di misura (di Lebesgue) nulla. Allora $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma integrale di ordine p :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{1/p}$$

2. Spazi di Hilbert

DEFINIZIONE 2.6 (spazio pre-hilbertiano). Sia X uno spazio vettoriale sul campo reale. Si dice che X è uno spazio *pre-hilbertiano* oppure *dotato di prodotto interno* se è definita una funzione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

detta *prodotto interno* o *scalare* tale che, per ogni $x, y, z \in X$ e ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si abbia:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$ (annullamento)
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (simmetria)
3. $\langle \mu x + \lambda y, z \rangle = \mu \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$ (bilinearità)

DEFINIZIONE 2.7. Un prodotto interno induce nello spazio una norma tramite la formula

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

quindi uno spazio pre-hilbertiano è anche normato.

PROPRIETÀ 2.1. Valgono le seguenti proprietà:

1. Disuguaglianza di Schwarz (con uguaglianza se e solo se sono linearmente dipendenti)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

2. Legge del Parallelogramma

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ovvero (considerando $\|x\|$ come la lunghezza del vettore x): *la somma dei quadrati della lunghezza delle diagonali di un parallelogramma uguaglia la somma dei quadrati della lunghezza dei suoi lati.*

DEFINIZIONE 2.8 (spazio di Hilbert). Si chiama *spazio di Hilbert* uno spazio dotato di *prodotto interno*, *completo* rispetto alla norma indotta.

ESEMPIO 2.2. \mathbb{R}^n è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare usuale

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

ed in generale una matrice $A = (a_{ij})_{ij=1, \dots, n}$, quadrata di ordine n , simmetrica e definita positiva, definisce un prodotto scalare in \mathbb{R}^n

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

ESEMPIO 2.3. Lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv$$

3. Ortogonalità e Proiezioni

3.1. Richiami di Algebra Lineare. Prima di addentrarci nelle questioni riguardanti l'ortogonalità e le proiezioni richiamiamo dei concetti base di algebra lineare.

Sia V il nostro spazio e $\mathcal{A} = [\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_k]$ un insieme di k vettori di V .

DEFINIZIONE 2.9 (base). Un insieme di vettori \mathcal{A} di V si dice *base* di V se valgono le seguenti proprietà:

1. è un insieme di generatori: ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare dei vettori dell'insieme \mathcal{A} ,
2. è linearmente indipendente: se e solo se per $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, da $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ segue che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

DEFINIZIONE 2.10 (elementi ortogonali). Due elementi x, y di uno spazio dotato di prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dicono *ortogonali* se $\langle x, y \rangle = 0$ e si scrive quindi $x \perp y$

DEFINIZIONE 2.11 (base ortogonale). Un insieme $\mathcal{A} = [\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_k]$ di vettori di V con $k \geq 2$ si dice *ortogonale* se $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ per ogni $i, j = 1, \dots, k$ con $i \neq j$ ossia se i vettori sono a due a due ortogonali. In particolare una *base ortogonale* di V è una base di V che sia anche un insieme ortogonale. Inoltre un insieme ortogonale $\mathcal{S} = [\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_k]$ costituito da vettori non nulli è linearmente indipendente.

DEFINIZIONE 2.12 (base ortonormale). Una base $\mathcal{B} = [\mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_n]$ si dice *base ortonormale* se è ortogonale e ogni suo vettore è normalizzato, ossia se

$$\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j \text{ per } i \neq j \text{ e } \|\mathbf{v}_i\| = 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

Se si considera un sottospazio V di \mathbb{R}^n ogni elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha una proiezione ortogonale su V .

3.2. Le proiezioni (caso finito-dimensionale). Se $\dim V = k < \infty$, dati i vettori $v_1, \dots, v_k \in V$, tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt, riusciamo a costruire una base ortonormale per V e quindi si può trovare una base ortonormale per \mathbb{R}^n , data da

$$v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$$

dove w_{k+1}, \dots, w_n sono opportuni versori. Quindi, dato $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{j=1}^k x_j v_j + \sum_{j=k+1}^n x_j w_j$$

da cui si ricava la proiezione di x su V :

$$P_V x = \sum_{j=1}^k x_j v_j$$

NOTA 2.1. Ricordiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_j, u_j \rangle}{\langle u_j, v_j \rangle} v_j. \end{aligned}$$

3.3. Le proiezioni (caso infinito-dimensionale). Anche in spazi a dimensione infinita si può, a volte, parlare di *base*.

DEFINIZIONE 2.13 (spazio separabile). Uno spazio H si dice *separabile* quando esiste un sottoinsieme di H numerabile e denso in H .

DEFINIZIONE 2.14 (insieme denso). Sia $V \subset H$. Allora V si dice *denso* in H se $\forall x \in H$ esiste una successione $\{v_n\} \in V$ tale che $\|v_n - x\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

DEFINIZIONE 2.15 (base ortonormale). Se H è *separabile*, esiste una successione $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ di elementi di H che costituisce una *base ortonormale* tale che:

$$\begin{aligned} \langle w_k, w_j \rangle &= \delta_{kj} & k, j &\geq 1, \dots \\ \|w_k\| &= 1 & k &\geq 1 \end{aligned}$$

e ogni $x \in H$ si può scrivere nella forma (serie di Fourier generalizzata):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, w_k \rangle w_k$$

dove i $c_k = \langle x, w_k \rangle$ si chiamano *coefficienti di Fourier* rispetto alla base considerata. Inoltre, dal teorema di Pitagora, si ha:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle x, w_k \rangle)^2$$

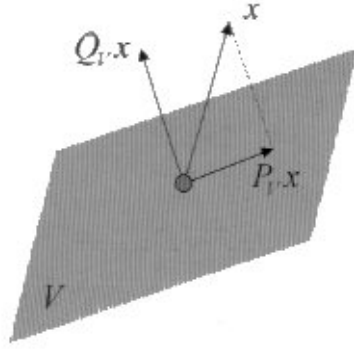
Ora, avendo a disposizione una base ortonormale $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, la proiezione di un elemento $x \in H$ sul sottospazio V generato, diciamo da w_1, \dots, w_N è

$$P_V x = \sum_{k=1}^N \langle x, w_k \rangle w_k$$

ESEMPIO 2.4. Un esempio di spazio di Hilbert separabile è $L^2(0, 2\pi)$ e l'insieme di funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

costituisce una base numerabile ortonormale.



3.4. Il Teorema di Proiezione. Ciò che rende importante $P_V x$ è di essere l'elemento di V a *minima distanza* da $x \in H$ e questo evita il ricorso ad una base dello spazio H che in dimensione infinita potrebbe non essere agevole:

TEOREMA 2.1 (di proiezione). *Sia V un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H . Allora, per ogni $x \in H$ esiste un unico elemento $P_V x \in V$ tale che*

$$\|P_V x - x\| = \inf_{y \in V} \|y - x\|.$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- i) $P_V x = x$ se e solo se $x \in V$
- ii) posto $Q_V x = x - P_V x$ si ha che $Q_V x \in V^\perp$ e $\|x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|Q_V x\|^2$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$d = \inf_{v \in V} \|v - x\|.$$

Dalla definizione di estremo inferiore per ogni intero $n \geq 1$ esiste $v_n \in V$ tale che

$$d \leq \|v_n - x\| < d + \frac{1}{n}$$

e quindi $\|v_n - x\| \rightarrow d$ se $n \rightarrow \infty$. La successione $\{v_n\}$ è di Cauchy: utilizzando la legge del parallelogramma per i vettori $v_n - x$ e $v_m - x$ si ha

$$(3) \quad \|v_n + v_m - 2x\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n - x\|^2 + 2\|v_m - x\|^2$$

Notiamo ora che $\frac{v_n + v_m}{2} \in V$ per cui $\|v_n + v_m - 2x\|^2$ si può scrivere come

$$\|v_n + v_m - 2x\|^2 = 4 \left\| \frac{v_n + v_m}{2} - x \right\|^2 \geq 4d^2.$$

e dalla (3) otteniamo:

$$\begin{aligned} \|v_n + v_m - 2x\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 &= 2\|v_n - x\|^2 + 2\|v_m - x\|^2 \\ \|v_n - v_m\|^2 &= 2\|v_n - x\|^2 + 2\|v_m - x\|^2 - \|v_n + v_m - 2x\|^2 \\ \|v_n - v_m\|^2 &\leq 2\|v_n - x\|^2 + 2\|v_m - x\|^2 - 4d^2 \end{aligned}$$

Passando ora al limite per $m, n \rightarrow \infty$ si ha che il secondo membro tende a 0 e quindi anche

$$\|v_m - v_n\| \rightarrow 0$$

e pertanto $\{v_n\}$ è di Cauchy. Inoltre, essendo H completo, si ha che $v_n \rightarrow v$ ed essendo V chiuso, si deduce che $v \in V$ e $\|v - x\| = d$ per la continuità della norma.

Proviamo ora che l'elemento v di V tale che $\|v - x\| = d$ è unico. Se infatti ci fosse un altro elemento $w \in V$ tale che $\|w - x\| = d$, usando ancora la legge del parallelogramma avremmo:

$$\begin{aligned} \|w - v\|^2 &= 2\|w - x\|^2 + 2\|v - x\|^2 - 4 \left\| \frac{w + v}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

da cui $w = v$. Quindi esiste un unico elemento $v = P_V x \in V$ tale che

$$\|x - P_V x\| = d.$$

Poichè V è chiuso, $x \in V$ se e solo se $d = 0$ ovvero se $x = P_V x$.

La proprietà *ii*) si dimostra invece come segue: siano $Q_V = x - P_V x$, $v \in V$ e $t \in \mathbb{R}$. Andiamo a mostrare che la forma quadratica $\|x - (P_V x + tv)\|^2$ ha minimo per $t = 0$ il che implica la proprietà *ii*) del teorema. Infatti $P_V x + tv \in V \quad \forall t$ e si ha

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - (P_V x + tv)\|^2 = \|Q_V x - tv\|^2 \\ &\leq \|Q_V x\|^2 - 2t\langle Q_V x, v \rangle + t^2\|v\|^2 \\ &\leq d^2 - 2t\langle Q_V x, v \rangle + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

che diviene:

$$2t\langle Q_V x, v \rangle \leq t^2\|v\|^2.$$

1. Dividendo per $t > 0$, allora si ottiene

$$\langle Q_V x, v \rangle \leq \frac{t}{2}\|v\|^2.$$

che per l'arbitrarietà di t si ottiene:

$$\langle Q_V x, v \rangle \leq 0.$$

2. Dividendo invece per $t < 0$, si ottiene

$$\langle Q_V x, v \rangle \geq \frac{t}{2}\|v\|^2.$$

che per l'arbitrarietà di t si ottiene:

$$\langle Q_V x, v \rangle \geq 0.$$

Sommando gli effetti otteniamo: $\langle Q_V x, v \rangle = 0$ che vuol dire che v e $Q_V x$ sono ortogonali per cui $Q_V x \in V^\perp$ implicando $\|x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|Q_V x\|^2$. □

La proprietà *ii*) mostra un risultato importante: gli elementi $P_V x$ e $Q_V x$ si chiamano *proiezioni ortogonali* su V e V^\perp , rispettivamente. Quindi la proprietà (1) (che in realtà è un minimo) combinata con la (2) equivalgono all'affermazione che H è una somma diretta di V e V^\perp :

$$H = V \oplus V^\perp$$

Dalla (1) si ricava poi che:

$$V^\perp = \emptyset \quad \text{se e solo se} \quad V = H.$$

4. Operatori Lineari

4.1. Definizioni preliminari.

DEFINIZIONE 2.16 (operatore lineare). Siano H_1 e H_2 spazi di Hilbert (su \mathbb{R}). Un *operatore lineare* da H_1 a H_2 è una funzione

$$L : H_1 \rightarrow H_2$$

tale che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall x, y \in H_1$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

Inoltre se un operatore L è lineare, si scrive Lx anziché $L(x)$. Si definisce inoltre:

1. *nucleo* di L la controimmagine del vettore nullo:

$$\mathcal{N}(L) = \{x \in H_1 : Lx = 0\}$$

e risulta un sottospazio di H_1

2. *immagine* o *rango* l'insieme delle immagini:

$$\mathcal{R}(L) = \{y \in H_2 : \exists x \in H_1, Lx = y\}$$

e risulta un sottospazio di H_2 .

DEFINIZIONE 2.17 (operatore limitato). Un operatore L si dice *limitato* se esiste una costante C tale che $\forall x \in H_1$

$$\|Lx\|_{H_2} \leq C\|x\|_{H_1}$$

In particolare ciò vuole significare che la sfera di raggio R in H_1 viene trasformata da L in un insieme contenuto nella sfera di raggio CR in H_2 . La costante C si può dunque interpretare come un controllo del “tasso di espansione” operato da L . In particolare, se $C < 1$, L opera una contrazione delle distanze. Se $x \neq 0$ usando la linearità di L si può scrivere la definizione (2.17) come:

$$\left\| L\left(\frac{x}{\|x\|_{H_1}}\right) \right\|_{H_2} \leq C$$

che, poiché $\frac{x}{\|x\|_{H_1}}$ ha norma unitaria in H_1 equivale a richiedere

$$\sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Lx\|_{H_2} = K \leq \infty \quad (K \leq C).$$

TEOREMA 2.2. *Un operatore lineare $L : H_1 \rightarrow H_2$ si dice limitato se e solo se è continuo.*

ESEMPIO 2.5. Sia $H = L^2(\Omega)$, Ω aperto in \mathbb{R}^n . Sia g fissata in $L^2(\Omega)$. L'operatore definito da

$$L_g : f \mapsto \int_{\Omega} fg$$

è lineare e continuo. Infatti per la disuguaglianza di Schwarz:

$$|L_g f| = \left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} |f|^2} \sqrt{\int_{\Omega} |g|^2} = \|g\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

e quindi la definizione (2.17) vale con $C = \|g\|_{L^2(\Omega)}$.

ESEMPIO 2.6. Sia V sottospazio *chiuso* di uno spazio di Hilbert H . Le proiezioni definite dal teorema (2.1)

$$x \mapsto P_V x, \quad x \mapsto Q_V x$$

sono operatori lineari continui da H in H . Infatti da $\|x\|^2 = \|P_V x\|^2 + \|Q_V x\|^2$ segue che:

$$\|P_V x\| \leq \|x\|, \quad \|Q_V x\| \leq \|x\|$$

per cui vale la definizione (2.17) con $C = 1$.

4.2. I Funzionali.

DEFINIZIONE 2.18 (di funzionale). L'insieme degli operatori lineari e continui (o limitati) da uno spazio di Hilbert H_1 in un altro spazio di Hilbert H_2 si indica con il simbolo

$$\mathcal{L}(H_1, H_2).$$

Nel caso in cui $H_2 = \mathbb{R}$ invece di operatore su usa il termine *funzionale*.

DEFINIZIONE 2.19 (di spazio duale). L'insieme dei funzionali lineari e continui su uno spazio di Hilbert H prende il nome di spazio duale di H e si indica con il simbolo H' (anziché $\mathcal{L}(H, \mathbb{R})$).

Dati due operatori $L, G \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ si possono definire in modo naturale altri due operatori nella stessa classe, somma e prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned} (G + L)(x) &= Gx + Lx \\ (\lambda L)x &= \lambda Lx \end{aligned}$$

dove $x \in H_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. L'insieme $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ risulta così dotato di una struttura di spazio vettoriale (reale). Lo si può normare ponendo

$$\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Lx\|_{H_2}$$

In particolare per ogni operatore limitato avremo:

$$\|Lx\|_{H_2} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \|x\|_{H_1}$$

e se non sorgono ambiguità, potremo scrivere semplicemente $\|L\|$ anziché $\|L\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ o, nel caso dei funzionali $\|L\|_{H'}$.

DEFINIZIONE 2.20. $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ è uno spazio di Banach.

NOTA 2.2. Dato uno spazio di Hilbert H abbiamo sempre indicato il prodotto scalare in H con il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (oppure $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$). Sia ora $L \in H'$: la sua azione su un elemento $x \in H$ si scrive semplicemente con Lx .

4.3. Il teorema di rappresentazione di Riesz. La determinazione del duale di uno spazio di Hilbert è un problema molto importante che verrà risolto con il *Teorema di Riesz*. In sostanza questo teorema ci dice che *ogni elemento del duale è rappresentabile mediante prodotto interno con un opportuno elemento* estendendo così un risultato della dimensione finita: se L è un funzionale lineare in \mathbb{R}^n , esiste un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$L\mathbf{h} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle$$

TEOREMA 2.3 (di rappresentazione di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert. Per ogni $L \in H'$ esiste un unico elemento $u \in H$ tale che:*

1. $Lx = \langle u, x \rangle$ per ogni $x \in H$
2. $\|L\|_{H'} = \|u\|$.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{N} il nucleo di L .

Se $\mathcal{N} = L$ la tesi segue scegliendo $u = 0$ (caso banale).

Se $\mathcal{N} \neq L$ allora \mathcal{N} è un sottospazio di H , *chiuso* per la continuità di L (infatti, se $\{x_n\} \in \mathcal{N}$ e $x_n \rightarrow x$, allora $0 = Lx_n \rightarrow Lx$ e perciò $x \in \mathcal{N}$).

Dal teorema di proiezione si deduce che esiste un elemento non nullo $z \in \mathcal{N}^\perp$ tale che, quindi $Lz \neq 0$ e con norma unitaria $\|z\| = 1$. Basta prendere ora un qualunque elemento $z_0 \notin \mathcal{N}$ e definire

$$z = \frac{z_0 - P_{\mathcal{N}}z_0}{\|z_0 - P_{\mathcal{N}}z_0\|}.$$

Osserviamo ora che, dato un qualunque elemento $x \in H$, l'elemento

$$w = x - \frac{Lx}{Lz}z$$

appartiene a \mathcal{N} . Infatti

$$Lw = L\left(x - \frac{Lx}{Lz}z\right) = Lx - \frac{Lx}{Lz}Lz = 0$$

Essendo $z \in \mathcal{N}^\perp$ e $\|z\| = 1$ si ha

$$0 = \langle z, w \rangle = \langle z, x \rangle - \frac{Lx}{Lz}$$

ossia

$$Lx = \langle L(z)z, x \rangle$$

La proprietà (1) vale dunque con $u = L(z)z$. Per l'unicità, osserviamo che, se esistesse $v \in H$, $v \neq u$, tale che

$$Lx = \langle v, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in H,$$

sottraendo quest'equazione alla proprietà (1) appena mostrata, si avrebbe subito che

$$\langle u - v, x \rangle = 0 \quad \text{per ogni } x \in H$$

che implica $v = u$. Infine la proprietà (2) si dimostra osservando che, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$|\langle u, x \rangle| \leq \|x\|\|u\|$$

e quindi

$$\|L\|_{H'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |Lx| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u, x \rangle| \leq \|u\|$$

Viceversa,

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = Lu \leq \|L\|_{H'}\|u\|$$

da cui, essendo $u \neq 0$, $\|u\| \leq \|L\|_{H'}$. Dunque $\|L\|_{H'} = \|u\|$ e la dimostrazione è conclusa. \square

Il teorema di rappresentazione permette, in pratica, di *identificare uno spazio di Hilbert con il suo duale*. Possiamo quindi introdurre l'operatore

$$J : H' \rightarrow H$$

che associa ad ogni elemento $L \in H'$ l'unico elemento $u \in H$ che lo rappresenta, tale che, cioè, $Lx = \langle u, x \rangle$ per ogni $x \in H$. L'operatore J è *biiettivo* ed *isometrico*:

$$L \rightleftharpoons u \quad \text{e} \quad \|L\|_{H'} = \|u\|_H$$

e prende il nome di *operatore di Riesz* oppure *isometria canonica tra H' ed H* . Ne segue che:

DEFINIZIONE 2.21. H' è uno spazio di Hilbert con prodotto interno definito dalla relazione

$$\langle L_1, L_2 \rangle_{H'} = \langle u_1, u_2 \rangle$$

dove $u_1 = JL_1, u_2 = JL_2$.

ESEMPIO 2.7. $L^2(\Omega)$ si può identificare con il suo duale. Tutti i funzionali lineari e continui su $L^2(\Omega)$ sono dunque della forma L_g (vedasi esempio (2.5)).

NOTA 2.3. Il teorema di Riesz permette di calcolare l'azione di un funzionale lineare e continuo F su uno spazio di Hilbert H mediante il prodotto interno con l'unico elemento $z_F = JF$, dove J è l'isometria canonica tra H' e H . Di fatto, ciò permette di *identificare* H con il suo duale H' .

5. Problemi Variazionali Astratti

5.1. Forme Bilineari. Nella formulazione variazionale dei problemi al contorno per operatori differenziali, un ruolo importante è svolto dalle *forme bilineari*.

DEFINIZIONE 2.22 (di forma bilineare). Se V_1, V_2 , sono spazi pre-Hilbertiani, una *forma bilineare* su $V_1 \times V_2$ è una funzione

$$a : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Per ogni $y \in V_2$ fissato, la funzione

$$x \mapsto a(x, y)$$

è lineare su V_1

2. Per ogni $x \in V_1$ fissato, la funzione

$$y \mapsto a(x, y)$$

è lineare su V_2

Se $V_1 = V_2 = V$ diremo semplicemente *forma bilineare su V* anziché su $V \times V$.

ESEMPIO 2.8. Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrice quadrata di ordine n . La formula

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

definisce una forma bilineare in \mathbb{R}^n .

ESEMPIO 2.9. La formula

$$a(u, v) = \int_a^b A(x)u'v' dx + \int_a^b B(x)u'v dx + \int_a^b C(x)uv dx$$

(A, B, C funzioni limitate) definisce una forma bilineare in $C^1([a, b])$, lo spazio pre-hilbertiano rispetto al prodotto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b uv + \int_a^b u'v'.$$

DEFINIZIONE 2.23. Una forma bilineare in V si dice:

- a) *continua* se esiste una costante positiva M tale che

$$|a(x, y)| \leq M\|x\|_V\|y\|_V, \quad \forall x, y \in V$$

- b) *coerciva* se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

5.2. Teorema di Lax-Milgram.

DEFINIZIONE 2.24 (di problema variazionale). Siano V uno spazio di Hilbert, $a = a(u, v)$ una forma bilineare in V e un funzionale $F \in V'$. Allora chiamiamo *problema variazionale astratto* il seguente problema

$$(4) \quad \text{Trovare } u \in V \text{ tale che } a(u, v) = Fv, \quad \forall v \in V.$$

Molti problemi per equazioni differenziali possono essere formulati in modo da rientrare in questa classe.

TEOREMA 2.4 (di Lax-Milgram). *Se la forma bilineare a è*

- i) *continua:*

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V$$

- ii) *coerciva: esiste $\alpha > 0$*

$$|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

allora esiste un'unica soluzione $\bar{u} \in V$ del problema variazionale (4). Inoltre vale la seguente stima di stabilità:

$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per maggiore chiarezza dividiamo la dimostrazione in più passi:

1. *Riscriviamo il problema.* Fissato $u \in V$, l'applicazione

$$v \longmapsto a(u, v)$$

è lineare e continua (per ipotesi i) e definisce perciò un elemento di V' . In base al teorema di rappresentazione di Riesz, risulta associato ad ogni $u \in V$ un unico elemento $h = Au \in V$ tale che

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

D'altra parte, essendo $F \in V'$, sempre in base al teorema di rappresentazione, esiste un unico elemento $z \in V$ tale che

$$Fv = \langle z, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

e inoltre $\|F\|_{V'} = \|z\|$.

Il problema variazionale diventa allora:

$$\text{Trovare } u \in V \text{ tale che } \langle Au, v \rangle = \langle z, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

equivalente a trovare u tale che

$$Au = z.$$

Occorre quindi esaminare l'operatore A . Vogliamo dimostrare che

$$A : V \rightarrow V$$

è un *isomorfismo*, ovvero che è un operatore lineare, continuo, iniettivo e suriettivo.

2. *Linearità e continuità di A .*

• *Linearità.* Per ogni $u_1, u_2, v \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} \langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle &= a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) && = \\ &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v) && = \\ &= \lambda_1 \langle Au_1, v \rangle + \lambda_2 \langle Au_2, v \rangle && = \\ &= \langle \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v \rangle. \end{aligned}$$

da cui

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2$$

• *Continuità.* Si ha

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 &= \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \\ &\leq M \|u\| \|Au\| \end{aligned}$$

da cui

$$\|Au\| \leq M \|u\|.$$

3. *A è iniettivo e ha immagine chiusa.* In simboli

$$\mathcal{N} = \{0\} \text{ e } \mathcal{R}(A) \text{ è un sottospazio chiuso di } V.$$

Infatti, dalla coercività di a si ricava:

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u \rangle \leq \|Au\| \|u\|$$

da cui:

$$(5) \quad \|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|Au\|$$

Se perciò $Au = 0$ deve essere $u = 0$ e quindi $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

Per mostrare che $\mathcal{R}(A)$ è un sottospazio chiuso di V occorre considerare una successione $\{y_n\} \subset \mathcal{R}(A)$ tale che $y_n \rightarrow y \in V$ e mostrare che $y \in \mathcal{R}(A)$. Essendo $y_n \in \mathcal{R}(A)$, esiste u_n tale che $Au_n = y_n$. Dalla stima (5) si ha:

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y_n - y_m\|$$

per cui essendo $\{y_n\}$ di Cauchy lo è anche $\{u_n\}$ e quindi esiste $u \in V$ tale che:

$$u_n \rightarrow u.$$

Per la continuità di A segue che $y_n = Au_n \rightarrow Au$. L'unicità del limite dà $Au = y$ per cui $y \in \mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$ è chiuso.

4. A è suriettivo, cioè $\mathcal{R}(A) = V$. Infatti, se fosse $\mathcal{R}(A) \subset V$, essendo $\mathcal{R}(A)$ sottospazio chiuso, per il teorema di proiezione esisterebbe $z \neq 0, z \in \mathcal{R}(A)^\perp$. In particolare si avrebbe

$$0 = \langle Az, z \rangle = a(z, z) \geq \alpha \|z\|^2$$

da cui $z = 0$ (contraddizione). Dunque deve essere $\mathcal{R}(A) = V$

5. *Esistenza e unicità della soluzione del problema variazionale (4)*. Poiché A è suriettivo e iniettivo, esiste una e una sola $\bar{u} \in V$ tale che $A\bar{u} = z$. Per quanto visto al punto 1 della dimostrazione, \bar{u} è l'unica soluzione del problema variazionale (4).
6. *Stima di Stabilità*. Dalla stima (5) con $u = \bar{u}$ si trova

$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|A\bar{u}\| = \frac{1}{\alpha} \|z\| = \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$$

che conclude la dimostrazione. \square

NOTA 2.4. La stima di stabilità data dal teorema di Lax-Milgram è così chiamata per il seguente motivo: il dato nel problema è costituito dal funzionale F , elemento del duale di V . Poiché per ogni F il teorema assicura l'esistenza di un'unica soluzione u_F , la corrispondenza

$$\text{dati} \longmapsto \text{soluzione}$$

è una *funzione (univoca)* da V' a V .

Siano ora $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 \in V'$ e \bar{u}_1, \bar{u}_2 le corrispondenti soluzioni. In base alla bilinearità di a , abbiamo che

$$\begin{aligned} a(\lambda\bar{u}_1 + \mu\bar{u}_2, v) &= \lambda a(\bar{u}_1, v) + \mu a(\bar{u}_2, v) = \\ &= \lambda F_1 v + \mu F_2 v. \end{aligned}$$

Si deduce quindi che la soluzione corrispondente ad una combinazione lineare dei dati è la combinazione lineare delle soluzioni corrispondenti o, in altri termini, la corrispondenza dati-soluzione è *lineare*. Per il problema variazionale vale quindi il *principio di sovrapposizione*. Se applichiamo la stima di convergenza alla differenza $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ possiamo scrivere:

$$\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F_1 - F_2\|_{V'}$$

che mostra come la corrispondenza dati-soluzione sia una funzione *lipschitziana* con costante di Lipschitz pari a $\frac{1}{\alpha}$. Questa costante riveste un ruolo particolarmente importante, perchè controlla la variazione in norma della soluzione in seguito ad una variazione dei dati, misurata attraverso la norma $\|F_1 - F_2\|$. Naturalmente, il problema è tanto più stabile quanto più elevata è la costante α di coercività. Quindi:

DEFINIZIONE 2.25. L'operatore che associa ad $F \in V'$ la soluzione $u_F \in V$ del problema variazionale è un isomorfismo tra V' e V .

6. Equazione di Eulero

Se la forma bilineare a è simmetrica, cioè se

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

al problema variazionale astratto (4) è associato in modo naturale un problema di minimo. Se consideriamo, ora, il funzionale quadratico

$$E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - Fv.$$

Possiamo enunciare il seguente teorema:

TEOREMA 2.5. *Sia a simmetrica. Allora \bar{u} è soluzione del problema (4) se e solo se \bar{u} minimizza E , ovvero*

$$E(\bar{u}) = \min_{v \in V} E(v)$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e ogni "variazione" $v \in V$ si ha

$$\begin{aligned} E(\bar{u} + \varepsilon v) - E(\bar{u}) &= \left\{ \frac{1}{2} a(\bar{u} + \varepsilon v, \bar{u} + \varepsilon v) - F(\bar{u} + \varepsilon v) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} a(\bar{u}, \bar{u}) - F\bar{u} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ a(\bar{u}, \bar{u}) + a(\bar{u}, \varepsilon v) + a(\varepsilon v, \bar{u}) + a(\varepsilon v, \varepsilon v) \right\} - F(\bar{u} + \varepsilon v) - \frac{1}{2} a(\bar{u}, \bar{u}) + F\bar{u} \\ &= \varepsilon \left\{ a(\bar{u}, v) - Fv \right\} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a(v, v) \end{aligned}$$

Se \bar{u} è soluzione del problema (4), si ha $a(\bar{u}, v) - Fv = 0$ e perciò

$$E(\bar{u} + \varepsilon v) - E(\bar{u}) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 a(v, v) \geq 0$$

per cui \bar{u} minimizza E . Viceversa, se \bar{u} minimizza E allora

$$E(\bar{u} + \varepsilon v) - E(\bar{u}) \geq 0,$$

che forza l'annullamento del termine in ε e cioè

$$(6) \quad a(\bar{u}, v) - Fv = 0, \quad \forall v \in V$$

ossia \bar{u} è soluzione del problema (4) □

Se a è simmetrica, l'equazione variazionale

$$a(u, v) - Fv = 0, \quad \forall v \in V$$

si chiama **equazione d'Eulero** per il funzionale E . Il funzionale E rappresenta in genere un'energia.

NOTA 2.5. Se a è simmetrica e coerciva, essa definisce in V un prodotto scalare, avendone tutte le proprietà

$$\langle u, v \rangle_a = a(u, v).$$

In tal caso, esistenza e unicità per il problema (4) seguono direttamente dal teorema di rappresentazione di Riesz, per il funzionale F , in riferimento al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$. Notiamo anche che esiste un unico elemento \bar{u} che minimizza il funzionale E .

7. Le distribuzioni

7.1. Richiami di Analisi.

DEFINIZIONE 2.26 (di supporto). Data una funzione continua v definita in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, per *supporto* di v si intende la chiusura dell'insieme dei punti in cui v è diversa da zero:

$$\text{supp } v = \text{chiusura di } \{\mathbf{x} \in \Omega : v(\mathbf{x}) \neq 0\}.$$

DEFINIZIONE 2.27 (di supporto compatto). Una funzione ha *supporto compatto* in Ω se $\text{supp } v$ è un sottoinsieme compatto in Ω (nel nostro caso di $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è compatto se $\text{supp } v$ è chiuso e limitato).

DEFINIZIONE 2.28 (di funzioni test). Indichiamo con $C_0^\infty(\Omega)$ l'insieme delle funzioni di classe infinitamente derivabili a supporto compatto in Ω . Le funzioni $C_0^\infty(\Omega)$ si chiamano *funzioni test*.

NOTA 2.6. Più avanti vedremo che sceglieremo le funzioni test v in modo che si annullino agli estremi dell'intervallo. (nel caso monodimensionale, quindi, se $v \in V$, con V spazio delle funzioni test, $v(0) = v(1) = 0$).

7.2. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$.

DEFINIZIONE 2.29 (di D^α). La generica derivata di ordine $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ (lunghezza del multi-indice che coincide con l'ordine di derivazione) è indicata con

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

DEFINIZIONE 2.30 (di $\mathcal{D}(\Omega)$). $\mathcal{D}(\Omega)$ è lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ dotato della seguente topologia (che risulterà di Hausdorff): Siano $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Si dice che

$$\{\varphi_k\} \rightarrow \varphi \quad \text{in } C_0^\infty(\Omega)$$

se

1. $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente in $\Omega, \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
2. esiste un compatto $K \subset \Omega$ che contiene i supporti di tutte le φ_k .

Se L è un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$ indichiamo l'azione di L su φ come

$$\langle L, \varphi \rangle.$$

Un funzionale lineare $L : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è continuo in $\mathcal{D}(\Omega)$ quando

$$\langle L, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle L, \varphi \rangle \quad \text{se } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega)$$

DEFINIZIONE 2.31 (di distribuzione). Una *distribuzione* in Ω è un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$. L'insieme delle distribuzioni si indica con il simbolo $\mathcal{D}'(\Omega)$. In altri termini $\mathcal{D}'(\Omega)$ è il duale di $\mathcal{D}(\Omega)$.

7.3. Derivata nel senso delle distribuzioni. Vogliamo estendere alle distribuzioni il calcolo differenziale. Naturalmente dobbiamo abbandonare l'idea di una definizione tradizionale di derivata in quanto già per funzioni che possono presentare discontinuità le derivate in senso classico dell'analisi non esistono.

L'idea allora è quella di "scaricare" l'operazione di derivata sulle funzioni test, per le quali non ci sono problemi, in quanto differenziabili con continuità infinite volte. Lo strumento chiave è la formula di *integrazione per parti*, nota in più dimensioni come *formula di Gauss*.

Se prendiamo una funzione $u \in C^1(\Omega)$, v funzione test e $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$, dalla formula di integrazione per parti in più dimensioni otteniamo:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} v u \nu_i d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx$$

ma $v = 0$ su $\partial\Omega$ allora otteniamo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

che corrisponde a scrivere

$$(7) \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

La (7) mostra che l'azione di $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sulla funzione test φ è equivalente all'azione di u su $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Questa equivalenza porta alla definizione di *derivata nel senso delle distribuzioni* e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ si chiama *derivata debole*.

DEFINIZIONE 2.32. Sia $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La derivata $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ è la distribuzione definita dalla formula

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

inoltre si ricordi che:

1. se $u \in C^1(\Omega)$, le sue derivate nel senso delle distribuzioni coincidono con quelle classiche.
2. la derivata di una distribuzione è sempre definita. Inoltre, poichè la derivata di una distribuzione è ancora una distribuzione segue che ogni distribuzione è derivabile infinite volte.

8. Gli spazi di Sobolev

Gli spazi di Sobolev costituiscono uno degli ambienti funzionali adatti al trattamento dei problemi al contorno per operatori alle derivate parziali.

8.1. Le funzioni a quadrato sommabile. Consideriamo lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile su $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\Omega < \infty\}$$

è uno spazio di Hilbert il cui prodotto scalare è

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\Omega.$$

La norma $L^2(\Omega)$ è quella associata al prodotto scalare ovvero

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)}}.$$

Ad ogni funzione $f \in L^2(\Omega)$ si associa una distribuzione $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definita nel seguente modo:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\Omega \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

LEMMA 2.1. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$.

Grazie ad esso è possibile dimostrare che la corrispondenza fra f e T_f è iniettiva, e dunque si può identificare $L^2(\Omega)$ con un sottoinsieme di $\mathcal{D}'(\Omega)$ scrivendo:

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

8.2. H^k . Abbiamo appena visto che le funzioni di $L^2(\Omega)$ sono particolari distribuzioni ma non è detto che anche le loro derivate siano ancora delle funzioni di $L^2(\Omega)$ (esempio la funzione caratteristica).

DEFINIZIONE 2.33 (di spazio di Sobolev). Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e k un intero positivo. Si chiama *spazio di Sobolev* di ordine k su Ω lo spazio formato dalla totalità delle funzioni di $L^2(\Omega)$ aventi tutte le derivate (distribuzionali) fino all'ordine k appartenenti ad $L^2(\Omega)$:

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

Ovviamente $H^{k+1}(\Omega) \subseteq H^k(\Omega)$ per ogni $k \geq 0$. Lo spazio $L^2(\Omega)$ viene talvolta indicato con H^0 . Gli spazi di Sobolev $H^k(\Omega)$ risultano essere spazi di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)(D^\alpha g) d\Omega$$

da cui la norma

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^k}} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 d\Omega}$$

8.3. H^1 e H_0^1 . Per comodità identificheremo la f finora usata con la funzione u .

DEFINIZIONE 2.34 (di H^1). Nel senso delle distribuzioni

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : Du \in L^2(\Omega)\}.$$

è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u'v' \rangle_{L^2}$$

Non tutte le funzioni di H^1 sono continue se Ω è un insieme aperto di \mathbb{R}^2 . Infatti vale il seguente risultato:

TEOREMA 2.6. *Se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n , dotato di una frontiera "sufficientemente regolare" allora*

$$H^k(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega}) \text{ se } k > m + \frac{n}{2}$$

In particolare, in una dimensione spaziale ($n = 1$), le funzioni di $H^1(\Omega)$ sono continue, mentre in due o tre dimensioni non lo sono necessariamente (lo sono invece quelle di $H^2(\Omega)$).

DEFINIZIONE 2.35 (di H_0^1). Se Ω è limitato lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ non è denso in $H^1(\Omega)$. Indichiamo, pertanto, con $H_0^1(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ ovvero, in una dimensione:

$$H_0^1 = \{u \in H^1; u(0) = 0, u(1) = 0\}.$$

è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u'v' \rangle_{L^2}.$$

In altre parole, data $u \in H^1(\Omega)$ e chiamando *traccia di f su $\partial\Omega$* il valore di u sul bordo, $H_0^1(\Omega)$ è formato dalle funzioni di H^1 aventi traccia nulla sul bordo. Le funzioni H_0^1 godono della seguente proprietà:

TEOREMA 2.7 (disuguaglianza di Poincaré). *Sia Ω un insieme limitato di \mathbb{R}^n , allora esiste una costante C_Ω tale che:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1.$$

8.4. H^{-1} . Nelle applicazioni alle EDP, in connessione con l'uso del teorema di Lax-Milgram, occorre spesso riconoscere se un dato funzionale F è un elemento del duale di $H_0^1(\Omega)$, se cioè F è un funzionale lineare e continuo su $H_0^1(\Omega)$

DEFINIZIONE 2.36 (di H^{-1}). Si indica con $H^{-1}(\Omega)$ il duale dello spazio $H_0^1(\Omega)$ con la norma

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \{|Fv| : v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}$$

Il seguente risultato ci fornisce un'indicazione su come riconoscere se un funzionale F è un elemento H^{-1} :

TEOREMA 2.8. Sia $F \in H^{-1}(\Omega)$. Allora esistono $f_0 \in L^2(\Omega)$ e $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tali che

$$(8) \quad F = f_0 + \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$(9) \quad \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \inf \{\|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)}^2\}$$

dove l'estremo inferiore è calcolato al variare delle funzioni f_0 e \mathbf{f} che soddisfano la (8).

NOTA 2.7. Gli elementi del duale di $H_0^1(\Omega)$ sono dunque rappresentati da funzioni di $L^2(\Omega)$ o da derivate prime (nel senso delle distribuzioni) di funzioni in $L^2(\Omega)$. La notazione $H^{-1}(\Omega)$ sta proprio a ricordare che l'operatore di divergenza "consuma" una derivata. In particolare $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

9. Formulazione Forte e Debole di una EDP

L'EDP proposta inizialmente (equazione (1)) è stata proposta secondo quella che si chiama *formulazione forte* di un problema alle derivate parziali. In particolare, una soluzione *forte* è una funzione nello spazio di Sobolev H^2 e ha due derivate in L^2 , nel senso delle distribuzioni; inoltre l'equazione differenziale vale quasi ovunque (cioè puntualmente, a meno di insiemi di misura nulla secondo Lebesgue).

In generale, tuttavia, la formulazione forte non è adeguata in quanto esistono fisicamente delle soluzioni continue ma non derivabili.

Serve dunque una formulazione del problema alternativa a quella forte che consenta di ridurre l'ordine di derivazione sulla funzione incognita u passando quindi da un problema differenziale del secondo ordine ad uno in forma integrale del primo ordine che sarà chiamato *formulazione debole* del problema differenziale.

Per la formulazione debole uno dei punti chiave è incorporare le condizioni al bordo nella formulazione stessa. I passi tipici sono i seguenti:

1. scegliere uno spazio di funzioni test, regolari ed adattate alla condizione al bordo,
2. moltiplicare l'equazione differenziale per una funzione test,
3. integrare l'equazione ottenuta sull'intervallo (ad esempio in una dimensione l'intervallo $[x_1, x_2]$ che generalmente è $[0, 1]$),
4. "scaricare" una delle derivate del termine di diffusione sulla funzione test mediante l'integrazione per parti, usando le condizioni al bordo,
5. leggere l'equazione integrale che si ottiene, in un opportuno spazio di Hilbert, che, in generale, coincide con uno spazio di Sobolev, chiusura topologica dello spazio di funzioni test di partenza.

Vedremo più avanti, nella sezione (2.1) del capitolo 3 l'equivalenza tra la formulazione forte e la formulazione debole in un problema specifico.

In particolare le soluzioni *deboli* sono funzioni nello spazio di Sobolev H^1 . Per questo lo spazio di Sobolev H_0^1 , dotato del prodotto interno visto, risulta essere uno spazio abbastanza buono per ambientare questi problemi alle derivate parziali, in quanto incorpora le condizioni al contorno.

10. Approssimazione e metodo di Galerkin

Nel problema astratto, l'equazione variazionale

$$a(u, v) = Fv$$

è valida per ogni elemento v di uno spazio V di Hilbert, che, in genere, è di dimensione infinita ma *separabile*. Sotto le ipotesi del teorema di Lax-Milgram la soluzione esiste ed è unica. Tuttavia non è banale calcolarla ed è quindi importante saper calcolare approssimazioni accurate della soluzione. Il metodo di Galerkin consiste nel cercare un'approssimazione della soluzione "proiettando" l'equazione su opportuni sottospazi di V a dimensione finita. In linea di principio, aumentando la dimensione del sottospazio dovrebbe migliorare l'approssimazione.

Vediamo ora come costruire una successione $\{V_k\}$ di sottospazi di V tale che:

- Ogni V_k è *finito dimensionale*, per esempio di dimensione k ,
- $V_k \subseteq V_{k+1}$ (comunque non necessario),
- $\bigcup V_k = V$.

Per eseguire la proiezione, si seleziona una base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ per V_k . Si cerca poi un'approssimazione della soluzione u nella forma

$$u_k = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j$$

risolvendo il problema

$$a(u_k, v) = Fv, \quad \forall v \in V_k.$$

Poichè gli elementi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ costituiscono una base per V_k , è sufficiente richiedere che

$$(10) \quad a(u_k, \varphi_r) = F\varphi_r, \quad r = 1, \dots, k.$$

Applicando la bilinearità della forma $a(\cdot, \cdot)$, i coefficienti incogniti c_1, c_2, \dots, c_k soddisfano allora le k equazioni algebriche

$$\sum_{j=1}^k c_j a(\varphi_j, \varphi_r) = F\varphi_r, \quad r = 1, \dots, k$$

o, in forma compatta,

$$(11) \quad \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{F}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_k, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_k, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_k) & a(\varphi_2, \varphi_k) & \dots & a(\varphi_k, \varphi_k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F\varphi_1 \\ F\varphi_2 \\ \dots \\ F\varphi_k \end{bmatrix}.$$

NOTA 2.8. \mathbf{A} si chiama *matrice di rigidità* o *di stiffness*.

10.1. Esistenza e unicità della soluzione. Ora se la forma bilineare a è coerciva (come richiesto nelle ipotesi del teorema di Lax-Milgram), la matrice \mathbf{A} è definita positiva ed in particolare *invertibile*: esiste quindi un'unica soluzione approssimata u_k in V_k del sistema lineare algebrico. Inoltre dal corso di Calcolo Numerico sappiamo che la matrice \mathbf{A} , essendo simmetrica e definita positiva, può essere fattorizzata con il metodo diretto di Cholesky che permette la risoluzione del sistema lineare più velocemente rispetto al metodo di eliminazione di Gauss. Una volta calcolata l'approssimazione u_k , occorre naturalmente dimostrare che, se $k \rightarrow \infty$, allora u_k tende alla vera soluzione u e poi controllare l'errore commesso ad ogni passo nell'approssimazione. Il seguente lemma mostra l'importanza che assumono i coefficienti di continuità (M) e di coercività (α) della forma bilineare.

10.2. Stima di convergenza. Introduciamo il seguente lemma:

LEMMA 2.2 (di Céa). *Valgano le ipotesi del teorema di Lax-Milgram. Supponiamo che u_k sia soluzione del problema approssimato (10) e che u sia la soluzione del problema originale. Allora*

$$\|u - u_k\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che si ha

$$a(u_k, v) = Fv, \quad \forall v \in V_k$$

e

$$a(u, v) = Fv, \quad \forall v \in V_k.$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$a(u - u_k, v) = 0, \quad \forall v \in V_k.$$

Poichè $u_k - v \in V_k$ si ottiene

$$a(u - u_k, u_k - v) = 0, \quad \forall v \in V_k.$$

Ora per la coercività di a si può scrivere

$$\begin{aligned}\alpha\|u - u_k\| &\leq a(u - u_k, u - u_k) = a(u - u_k, u - v) + a(u - u_k, v - u_k) \\ &= a(u - u_k, u - v) \leq M\|u - u_k\|\|u - v\|\end{aligned}$$

da cui semplificando

$$\|u - u_k\| \leq \frac{M}{\alpha}\|u - v\|.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $v \in V_k$ con la costante $\frac{M}{\alpha}$ indipendente da k . Vale perciò anche se a secondo membro si passa all'estremo inferiore su $v \in V_k$ \square

10.3. Convergenza del metodo. Poichè abbiamo supposto $\overline{\bigcup V_k} = V$, esiste una successione $\{w_k\} \subset V_k$ tale che $w_k \rightarrow u$ se $k \rightarrow \infty$. Dal lemma di Céa si ha

$$\|u - u_k\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_k} \|u - v\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - w_k\|$$

da cui

$$\|u - u_k\| \rightarrow 0$$

ossia la convergenza del metodo di Galerkin.

Il caso parabolico

In questo capitolo vogliamo esibire un esempio concreto di EDP risolta mediante gli elementi di analisi funzionale appena introdotti. In particolare vogliamo studiare un'equazione a derivate parziali di tipo parabolico che avrà il suo esempio principe nell'*equazione del calore*.

1. Formulazione generale

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (aperto e connesso) limitato, sia $T > 0$ e consideriamo il cilindro spazio-temporale $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Siano $A = A(\mathbf{x}, t)$ una matrice quadrata di ordine n , sia $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ un vettore in \mathbb{R}^n , $c = c(\mathbf{x}, t)$ e $f = f(\mathbf{x}, t)$ funzioni reali.

DEFINIZIONE 3.1 (di equazione parabolica). Un'equazione in *forma di divergenza* del cilindro spazio-temporale tipo

$$(12) \quad u_t - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(\mathbf{x}, t)u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t)u_{x_i} + c(\mathbf{x}, t)u = f(\mathbf{x}, t)$$

si dice *parabolica* in Q_T se $\exists \alpha > 0$ t.c. (*condizioni di ellitticità*)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}, t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in Q_T, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

richiedendo, in pratica, che sia coerciva la parte relativa alla sola \mathbf{x} .

Svilupperemo la teoria in forma di divergenza. Posta

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(\mathbf{x}, t)\nabla u) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x}, t)u$$

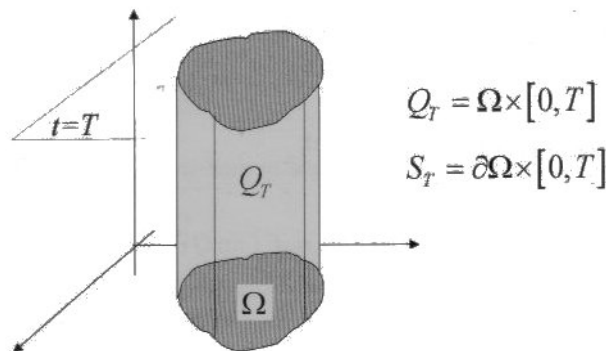
la nostra equazione di riferimento sarà:

$$u_t + \mathcal{L}u = f \quad \text{in } Q_T$$

che inoltre soddisfi la *condizione iniziale* (o di Cauchy)

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

e una delle condizioni di *Dirichlet*, *Neumann*, *miste* o *Robin* (viste nel capitolo 1) sulla frontiera laterale di Q_T , ovvero $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$. L'esempio principe è *l'equazione del calore* e ci serviremo del problema di Cauchy-Dirichlet per studiarla e arrivare ad una formulazione debole da risolvere.



2. L'equazione del Calore

2.1. Esistenza e Unicità. Vogliamo osservare l'evoluzione della temperatura $u(x, t)$ nel punto x ed al tempo t di una barra uniforme di lunghezza d (e spessore trascurabile) che occupa l'intervallo $[0, d]$, la cui conducibilità termica è ν e i cui estremi sono tenuti ad una temperatura costante di zero gradi. La temperatura iniziale è data dalla funzione iniziale u_0 mentre f rappresenta la produzione calorica (per unità di lunghezza) fornita dalla barra. La formula che risulta è la seguente, chiamata anche *equazione del calore*.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, & 0 < x < d, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < d \\ u(0, t) = u(d, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Vogliamo risolvere numericamente questo problema. Procediamo in modo formale:

1. moltiplichiamo l'equazione differenziale per ogni $t > 0$ per una funzione test $v = v(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} v - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v = f v, \quad \forall v \in V$$

2. integriamo su Ω e poniamo $V = H_0^1$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega - \nu \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1$$

che diviene, utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega - \nu \left(\left[\frac{\partial u}{\partial x} v \right]_{\Omega} - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega \right) = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1$$

ma ricordiamo che v si annulla al bordo e $u = u(t)$ per cui abbiamo la seguente formulazione debole:

$$\text{trovare } u \in H_0^1 \text{ tale che } \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} v d\Omega + \nu \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall t > 0, \forall v \in H_0^1$$

3. introduciamo la seguente forma:

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u(t), v) = \nu \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega$$

e il seguente funzionale:

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

4. e riscrivendo il problema abbiamo:

$$(13) \quad \text{trovare } u \in H_0^1 \text{ tale che } \int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} v d\Omega + a(u(t), v) = F(v) \quad \forall t > 0, \forall v \in H_0^1$$

con $u(0) = u_0$ e dove $a(\cdot, \cdot)$ e $F(\cdot)$ sono la forma bilineare e il funzionale associati rispettivamente all'operatore ellittico \mathcal{L} e al termine noto f e dove si è supposto, per semplicità, condizioni di Dirichlet nulle.

5. Osserviamo che $u(t) \in H_0^1$: di conseguenza si ha che $\frac{\partial u(t)}{\partial t} \in H^{-1}$, duale di H_0^1 (si veda la nota (2.7)). Indicando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare in L^2 , si potrà scrivere:

$$\text{trovare } u \in H_0^1 \text{ tale che } \frac{\partial}{\partial t} \langle u(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \forall t > 0, \forall v \in H_0^1$$

e nel senso delle distribuzioni in $[0, T]$. Riscrivendo il tutto:

$$(14) \quad \text{trovare } u \in H_0^1 \text{ tale che } \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right\rangle + a(u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \forall t > 0, \forall v \in H_0^1$$

Ora, per il teorema di Lax-Milgram (2.4) sappiamo che esiste ed è unica la soluzione del problema (13) se la forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ è *continua* e *coerciva*. Tuttavia, per le equazioni paraboliche è sufficiente che sia *continua* e *debolmente coerciva* ovvero:

$$\exists \lambda \geq 0, \exists \alpha > 0 : \quad a(v, v) + \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

ritrovando per $\lambda = 0$ la definizione standard di coercività. Infatti se u è soluzione dell'equazione (14) e vale la debole coercività possiamo porre:

$$w(t) = e^{-\lambda t} u(t).$$

Allora si avrebbe:

$$\frac{\partial w(t)}{\partial t} = e^{-\lambda t} \frac{\partial u(t)}{\partial t} - \lambda e^{-\lambda t} u(t) = e^{-\lambda t} \frac{\partial u(t)}{\partial t} - \lambda w(t)$$

risultando che $w(t)$ è soluzione di

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w(t), v \rangle + a(w(t), v) + \lambda \langle w(t), v \rangle = \langle e^{-\lambda t} f, v \rangle$$

che è un'equazione dello stesso tipo con una forma bilineare

$$\tilde{a}(w(t), v) = a(w(t), v) + \lambda \langle w(t), v \rangle$$

coerciva. In altri termini, se la forma lineare non è coerciva ma è debolmente coerciva, un semplice cambio di variabili permette di ricondursi ad un'equazione equivalente con una forma coerciva.

2.2. L'approssimazione di Galerkin. Consideriamo ora l'approssimazione del problema (13):

$$(15) \quad \text{trovare } u_h(t) \in V_h \text{ tale che } \int_{\Omega} \frac{\partial u_h(t)}{\partial t} v_h d\Omega + a(u_h(t), v_h) = F(v_h) \quad \forall t > 0, \forall v_h \in V_h$$

con $u_h(0) = u_{0h}$ approssimazione di u_0 nello spazio V_h e con $V_h \subset V$ opportuno spazio a dimensione finita. Tale problema è detto *semidiscretizzazione* di (13) in quanto rappresenta una discretizzazione nelle sole variabili spaziali.

Introduciamo una base $\{\varphi_i\}$ per V_h e osserviamo che basta che la (15) sia verificata per le funzioni della base affinché risulti soddisfatta da tutte le funzioni del sottospazio. Inoltre, poichè per ogni $t > 0$ anche la soluzione del problema di Galerkin appartiene al sottospazio avremo:

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) \varphi_j(x)$$

dove i coefficienti $\{u_j(t)\}$ rappresentano le incognite del problema (15).

Indicando con $\dot{u}_j(t)$ la derivata della funzione $u_j(t)$ rispetto al tempo, la (13) diviene:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t) \varphi_j \varphi_i d\Omega + a\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) \varphi_j, \varphi_i\right) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h,$$

ovvero:

$$(16) \quad \sum_{j=1}^{N_h} \dot{u}_j(t) \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega + \sum_{j=1}^{N_h} u_j(t) a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h,$$

con

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega \quad a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad f_i(t) = F(\varphi_i).$$

Definendo:

- il vettore delle icognite $\mathbf{u} = [u_1(t), \dots, u_{N_h}(t)]^T$
- la matrice di rigidità $A = [a_{ij}]$
- il vettore dei termini noti $\mathbf{f} = [f_1(t), \dots, f_n(t)]$

il sistema (16) può essere riscritto in forma matriciale come:

$$(17) \quad M \dot{\mathbf{u}}(t) + A \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t).$$

Per quanto riguarda la stima di convergenza dell'approssimazione di Galerkin si rimanda alla sezione (10) del capitolo 2.

2.3. Stima a priori. Consideriamo il problema (13); dato che le equazioni corrispondenti devono valere per ogni $v \in V$, sarà lecito porre $v = u(t)$ (per t fissato) soluzione del problema stesso:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} u(t) d\Omega + a(u(t), u(t)) = F(u(t)) \quad \forall t > 0.$$

Considerando i singoli termini, si ha

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} u(t) d\Omega = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u(t)|^2 d\Omega;$$

per la coercività della forma bilineare otteniamo

$$a(u(t), u(t)) \geq \alpha \|u(t)\|_V^2$$

ed infine

$$F(u(t)) = \langle f(t), u(t) \rangle \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Supponiamo per ora $f = 0$. Utilizzando le prime due relazioni e il fatto che $F(v) = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u(t)|^2 d\Omega + \alpha \|u(t)\|_V^2 &\leq 0 \quad \forall t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha \|u(t)\|_V^2 &\leq 0 \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Poichè questo risultato vale per ogni $t > 0$ possiamo integrarla rispetto al tempo sull'intervallo $(0, t)$, ottenendo:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2;$$

ed in particolare:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t > 0.$$

Quest'ultima relazione assicura che l'energia cinetica del sistema si riduce nel tempo. Questo è logico e plausibile per un'equazione parabolica del tipo analizzato poichè rappresenta un sistema dissipativo (essendo \mathcal{L} ellittico). Nel caso si abbia un termine di sorgente f quanto detto non sarà più vero. Ci si aspetta tuttavia una disuguaglianza analoga che tenga conto del termine di sorgente. In effetti, se consideriamo, diversamente da prima $f \neq 0$, otteniamo:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |u(t)|^2 d\Omega + \alpha \|u(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t > 0$$

da cui, integrando tra 0 e t si ottiene

$$(18) \quad \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha \int_0^t \|u(s)\|_V^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Per avere ragione del termine $\int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ a secondo membro (termine che dipende dalla storia passata del sistema evolutivo) utilizziamo il seguente risultato:

LEMMA 3.1 (di Gronwall). *Sia $A \in L^1(t_0, T)$ una funzione non negativa, g e φ delle funzioni continue su $[t_0, T]$. Se φ è tale che*

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t A(\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [t_0, T]$$

allora, se g è non-decrescente,

$$\varphi(t) \leq g(t) \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right), \quad \forall t \in [t_0, T].$$

La funzione

$$g(t) = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

è ovviamente non decrescente. Per cui, applicando il Lemma di Gronwall alla (18) con $A(\tau) = 1$, $g(t)$ definita come sopra e $\varphi(t) = \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, otteniamo:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^t \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right] \quad \forall t > 0.$$

da cui si ricava

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha \int_0^T \|u(s)\|_V^2 ds \leq e^T \left[\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right].$$

Questo risultato ci garantisce che la soluzione u appartiene allo spazio

$$L^2(\mathbb{R}^+; V) \cup C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

La stima a priori è valida anche per l'approssimazione di Galerkin:

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\alpha \int_0^t \|u_h(s)\|_V^2 ds \leq e^t \left[\|u_{0h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right] \quad \forall t > 0.$$

2.4. θ -metodo. Per risolvere il sistema (17) si può, ad esempio, usare il θ -metodo che discretizza la derivata temporale con un semplice rapporto incrementale e sostituisce gli altri termini con una combinazione lineare, dipendente dal parametro reale θ , con $0 \leq \theta \leq 1$, del valore al tempo t_k e di quello al tempo t_{k+1} :

$$(19) \quad M \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + A[\theta \mathbf{u}^{k+1} + (1 - \theta) \mathbf{u}^k] = \theta \mathbf{f}^{k+1} + (1 - \theta) \mathbf{f}^k$$

con $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ passo di discretizzazione (qui supposto costante).

In particolare, nella (19), per particolari valori di θ , si ottiene:

- $\theta = 0$: il *metodo di Eulero esplicito* (accurato al primo ordine rispetto Δt ma condizionatamente stabile al passo scelto)

$$M \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + A \mathbf{u}^k = \mathbf{f}^k$$

che significa risolvere un sistema con matrice $\frac{M}{\Delta t}$

- $\theta = 1$: il *metodo di Eulero implicito* (accurato al primo ordine rispetto Δt)

$$M \frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} + A \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{f}^{k+1}$$

che significa risolvere un sistema con matrice $\frac{M}{\Delta t} + A$

Osserviamo che la matrice M è invertibile essendo definita positiva.

Quindi nel caso $\theta > 0$ il sistema avrà la forma $K \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{g}$ con \mathbf{g} termine noto dipendente dalla soluzione al passo precedente e $K = \frac{M}{\Delta t} + \theta A$. Tale matrice è invariante nel tempo (essendo l'operatore \mathcal{L} e quindi la matrice A indipendente dal tempo: se la reticolazione spaziale non cambia, può essere fattorizzata una volta per tutte all'inizio del processo. Infatti, dato che M è simmetrica, se A è simmetrica anche la matrice K associata al sistema sarà simmetrica. Può essere quindi usata la fattorizzazione di Cholesky, $K = HH^T$ con H triangolare inferiore. Ad ogni passo andranno risolti due sistemi triangolari sparsi in N_h incognite:

$$\begin{aligned} H \mathbf{y} &= \mathbf{g} \\ H^T \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{y}, \end{aligned}$$

che richiedono circa N_h^2 operazioni.

2.5. Analisi di convergenza e stabilità del θ -metodo. Sia u_n^* la soluzione ottenuta con il ϑ -metodo partendo dalla soluzione *esatta* al tempo t_{n-1} (con h che indica il passo della discretizzazione):

$$(20) \quad u_n^* = y_{n-1} + h[\vartheta f_{n+1} + (1 - \vartheta) f_n].$$

Se noi alla (20) togliamo la quantità y_n otteniamo:

$$\begin{aligned} u_n^* - y_n &= y_{n-1} + h[\vartheta * f_{n+1} + (1 - \vartheta) f_n] - y_n \\ &= [y_{n-1} + h(1 - \vartheta) f_{n-1}] - [y_n - h\vartheta f_n] \\ &= \frac{h^2}{2}(1 - \vartheta) f'(\varepsilon) - \frac{h^2}{2} \vartheta f'(\varepsilon) \\ &= \frac{h^2}{2}(1 - 2\vartheta) y''(x) \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 3.2. Si chiama *errore locale di troncamento* la quantità

$$\tau_n(h) = \frac{u_n^* - y_n}{h} = \frac{h}{2}(1 - 2\vartheta) y''(x) + O(h^2).$$

DEFINIZIONE 3.3. Si chiama *errore globale di troncamento* la quantità:

$$\tau(h) = \max_{0 \leq n \leq T_{max}} |\tau_n(h)|.$$

DEFINIZIONE 3.4. Un metodo numerico è *consistente* di ordine p se

$$\tau(h) = O(h^p) \quad p \geq 1.$$

In particolare:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0 & & \tau(h) &= O(h^1) \\ \vartheta = \frac{1}{2} & & \tau(h) &= O(h^2) \\ \vartheta = 1 & & \tau(h) &= O(h^1) \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 3.5. Un metodo numerico per l'approssimazione del problema dato nell'intervallo $[t_0, T_{max}]$ è detto *zero-stabile* se esiste $C > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ e per ogni h sufficientemente piccolo, cioè $0 < h \leq h_0$ per un opportuno $h_0 > 0$ vale

$$|z_n - u_n| \leq C\delta, \quad 0 \leq n \leq N_h,$$

dove C è una costante che può dipendere dalla lunghezza dell'intervallo di integrazione I , z_n è la soluzione che si otterrebbe applicando il metodo numerico al problema perturbato e δ è la massima grandezza della perturbazione (con δ sufficientemente piccolo da garantire che il problema perturbato ammetta comunque un'unica soluzione sull'intervallo di integrazione).

TEOREMA 3.1 (di Lax-Ritchmyer). *Ogni metodo consistente è convergente se e solo se è zero-stabile*

Per vedere la zero-stabilità si può ricorrere alle condizioni sulle radici: in particolare, dato il metodo multi-step lineare

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^p a_j u_{n-j} + h \sum_{j=0}^p b_j f_{n-j} + hb_{-1} f_{n+1}, \quad n = p, p+1, \dots$$

per opportuni coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ e per un opportuno intero $p \geq 0$ (con $p+1$ che denota il numero di passi). Il polinomio di grado $p+1$ rispetto a r associato al metodo numerico multi-step lineare

$$\pi(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^p a_j r^{p-j}$$

è detto *primo polinomio caratteristico* e il metodo è zero-stabile se e solo se vale la seguente condizione sulle radici:

1. $|r_j| \leq 1$ per ogni $j = 0, \dots, p$,
2. inoltre $\pi'(r_j) \neq 0$ per quei j tali che $|r_j| = 1$ (in pratica $r = 1$ deve avere molteplicità pari a 1).

In particolare:

Eulero Esplicito (EE) :	$p = 0;$	$a_0 = 1;$	$b_{-1} = 0;$	$b_0 = 1;$
Eulero Implicito (EI) :	$p = 0;$	$a_0 = 1;$	$b_{-1} = 1;$	$b_0 = 0;$
Crank-Nicolson (CN) :	$p = 0;$	$a_0 = 1;$	$b_{-1} = 1/2;$	$b_0 = 1/2.$

In tutti questi casi il primo polinomio caratteristico è $\pi(r) = r - 1$ la cui unica radice è $r = 1$ di molteplicità singola: soddisfacendo il criterio delle radici possiamo concludere che il ϑ -metodo è 0-stabile e, per il teorema di Lax-Ritchmyer, è quindi convergente.

Per quanto riguarda l'analisi della stabilità (vogliamo cioè vedere se i metodi introdotti sono *incondizionatamente* stabili o sono *condizionatamente* stabili al passo h fissato), introduciamo il seguente problema test:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t \in (0, +\infty) \\ y(0) = 1 & \lambda \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

la cui soluzione esplicita è $y(t) = e^{\lambda t}$

DEFINIZIONE 3.6. Un metodo tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ si dice *assolutamente stabile*.

Applichiamo i tre metodi visti al problema test:

1. $\vartheta = 0$ (EE):

$$\begin{aligned} u_0 &= 1; \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= u_n + h\lambda u_n = (1 + h\lambda)u_n; \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} u_0 &= 1; \\ u_1 &= (1 + h\lambda); \\ u_2 &= (1 + h\lambda)^2; \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= (1 + h\lambda)^{n+1}; \end{aligned}$$

avremo assoluta stabilità ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$) se e solo se $|1 + h\lambda| < 1$ ovvero $h < \frac{2}{|\lambda|}$ che è la condizione sul passo per il metodo di Eulero Esplicito (in particolare se al posto di prendere λ costante si prendesse $\lambda = \lambda(t)$ la condizione sarebbe $h < \frac{2}{\max_{t \in \mathbb{R}_+} |\lambda(t)|}$): quindi il metodo è *condizionatamente assolutamente stabile*.

2. $\vartheta = 1/2$ (CN) si trova:

$$u_{n+1} = \left[\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right] \quad \text{allora } u_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ sempre.}$$

Il metodo è quindi incondizionatamente assolutamente stabile.

3. $\vartheta = 1$ (EI) si trova:

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} u_n \quad \text{con } h \lambda \neq 0$$

e per la convergenza si richiede

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1.$$

da cui:

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^{n+1} \quad \text{allora } u_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ sempre.}$$

Il metodo è quindi incondizionatamente assolutamente stabile.

Un esempio in GNU Octave

1. Un problema reale

1.1. Formulazione del problema. Vogliamo osservare l'evoluzione della temperatura $u(x, t)$ nel punto x dopo $t = 10$ secondi di una barra di vetro di lunghezza unitaria e spessore trascurabile che occupa l'intervallo $[0, 1]$, la cui conducibilità termica è $\nu = 1$ e i cui estremi sono tenuti ad una temperatura costante di zero gradi. La temperatura iniziale è data dalla funzione iniziale $f(x) = \sin(\pi x)$ mentre $g(x) = (-0.1 + \pi^2) \cdot e^{(-0.1 \cdot t)} \sin(\pi x)$ rappresenta la produzione calorica (per unità di lunghezza) fornita dalla barra. La formula che risulta è la seguente, chiamata anche *equazione del calore* relativa ad una barra unitaria di vetro.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x, t), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, t_0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

La soluzione analitica è $u(x, t) = e^{(-0.1t)} \cdot \sin(\pi x)$. Vediamo numericamente come affrontare il problema.

1.2. Come scegliere una base per il problema dato. Nel nostro caso abbiamo $\Omega = (0, 1)$. Vogliamo quindi costruire approssimazioni dello spazio $H^1(0, 1)$ dipendenti da un parametro h . Per questo introduciamo una partizione \mathcal{T}_h di $(0, 1)$ in $N - 1$ sottointervalli $K_j = (x_{j+1}, x_j)$ di ampiezza $h_j = x_{j+1} - x_j$ con

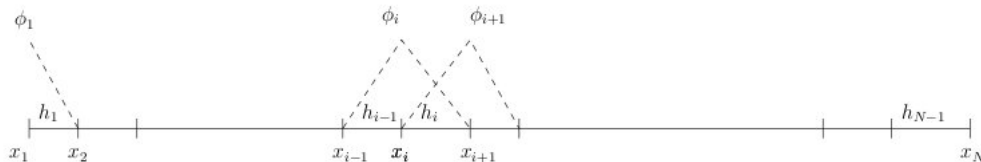
$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

e poniamo $h = \max_j h_j$. Possiamo prendere lo spazio delle funzioni continue e lineari a tratti (per esempio) su una partizione \mathcal{T}_h di $(0, 1)$. Questo spazio verrà indicato con la notazione X_h^1 . Poichè per due punti distinti passa un'unica retta ed essendo le funzioni continue, i *gradi di libertà* delle funzioni, ovvero i valori che bisogna assegnare per individuare univocamente le stesse funzioni, saranno pari al numero N di vertici della partizione stessa. Di conseguenza, una volta assegnate N funzioni di base φ_i con $i = 1, \dots, N$ l'intero spazio X_h^1 verrà descritto. Per operare una scelta intelligente di queste funzioni conviene che il supporto della generica funzione di base φ_i abbia intersezione non vuota con quello di un numero esiguo di altre funzioni di base (in tal modo, molti elementi della matrice di rigidità risulteranno nulli); inoltre conviene che la base sia *lagrangiana*, caratterizzata dalla proprietà seguente:

$$\varphi_i \in X_h^1 \quad \text{tale che} \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

essendo δ_{ij} il delta di Kronecher. La funzione φ_i è dunque lineare a tratti e vale uno in x_i e zero in tutti gli altri nodi della partizione.

Introduciamo una discretizzazione dell'intervallo $[0, 1]$ a passo variabile, come in figura.



Si ha allora, per $1 < i < N$,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\frac{d}{dx}\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mentre per $i = 1$,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_1}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\frac{d}{dx}\varphi_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h_1}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e, per $i = N$,

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_{N-1}}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\frac{d}{dx}\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{N-1}}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Evidentemente φ_i ha come supporto l'unione dei soli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ e $[x_i, x_{i+1}]$ se $i \neq 1$ e $i \neq N$ (per $i = 1$ e $i = N$ il supporto sarà limitato all'intervallo $[x_1, x_2]$ e $[x_{N-1}, x_N]$ rispettivamente). Di conseguenza, solo le funzioni di base φ_{i-1} e φ_{i+1} hanno supporto con intersezione non vuota con quello di φ_i e quindi la matrice di rigidezza sarà tridiagonale in quanto $a_{ij} = 0$ se $j \notin \{i-1, i, i+1\}$.

Andiamo ora a calcolare i coefficienti della matrice di massa M . Per $1 < i < N$ si ha

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 0 \text{ se } j \neq \{i-1, i, i+1\} \text{ infatti dalla figura } \varphi_i \cap \varphi_j = \emptyset; \\ m_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i \varphi_i dx = \frac{h_{i-1} + h_i}{3}; \\ m_{i,i+1} &= m_{i-1,i} = \frac{h_i}{6}; \end{aligned}$$

mentre per $i = 1$ e $i = N$:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 \varphi_1 dx = \frac{h_1}{3}; \\ m_{NN} &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} \varphi_N \varphi_N dx = \frac{h_{N-1}}{3}; \end{aligned}$$

Andiamo ora a calcolare i coefficienti della matrice A . Per $1 < i < N$ si ha:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{x_{i-h_{i-1}}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_i+h_i} \left(-\frac{1}{h_i}\right)^2 dx = \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}; \\ a_{i,i+1} &= a_{i+1,i} = a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_i+h_i} -\frac{1}{h_i} \cdot \frac{1}{h_i} dx = -\frac{1}{h_i}. \end{aligned}$$

Per $i = 1$ e $i = N$, si ha invece

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{x_1}^{x_1+h_1} \left(-\frac{1}{h_1}\right)^2 dx = \frac{1}{h_1}; \\ a_{NN} &= \int_{x_N-h_{N-1}}^{x_N} \left(-\frac{1}{h_{N-1}}\right)^2 dx = \frac{1}{h_{N-1}}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il calcolo di $\langle f, \varphi_i \rangle$ si può ricorrere alla formula di quadratura del trapezio che risulta essere sufficientemente accurata. Si ha dunque, per $1 < i < N$,

$$\begin{aligned} f_i = \langle f, \varphi_i \rangle &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} dx \approx \\ &\approx \frac{f(x_i)}{2} h_{i-1} + \frac{f(x_i)}{2} h_i = \frac{f(x_i)}{2} (h_{i-1} + h_i). \end{aligned}$$

Per $i = 1$ e $i = N$ si ha invece:

$$\begin{aligned} f_1 = \langle f, \varphi_1 \rangle &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) \frac{x_2 - x}{h_1} dx \approx \frac{f(x_1)}{2} h_1 \\ f_N = \langle f, \varphi_N \rangle &= \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) \frac{x - x_{N-1}}{h_{N-1}} dx \approx \frac{f(x_N)}{2} h_{N-1} \end{aligned}$$

Scegliendo come $\Delta x = h$ (discretizzazione dell'intervallo spaziale) costante, la matrice da risolvere, dalla (19), sarà $K = \frac{M}{\Delta t} + \theta A$ ovvero:

$$K = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} h/3 & h/6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h/6 & 2h/3 & h/6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h/6 & 2h/3 & h/6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h/6 & 2h/3 & h/6 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h/6 & h/3 \end{bmatrix} + \theta \nu \begin{bmatrix} 1/h & -1/h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/h & 2/h & -h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/h & 2/h & -1/h & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1/h & 2/h & -1/h \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1/h & 1/h \end{bmatrix}.$$

NOTA 4.1. Le condizioni di Dirichlet omogenee per un nodo x_i si impongono sostituendo la riga corrispondente di K con zeri e 1 in diagonale.

2. Codice GNU Octave

In questa sezione presentiamo il codice usato per risolvere il problema dato.
L'M-file dove definiamo il problema:

```
%
%
% [pdeheat1d.m]
%
5
clear all
close all

%%% THETA
10 theta=1/2;

%%% COEFFICIENTE DI CONDUCIBILITA' TERMICA DEL VETRO
mu=1;

15 %%% ESTREMI TEMPORALI DEL PROBLEMA
t0=0; Tmax=10;

%%% PARTIZIONE DELL'INTERVALLO TEMPORALE [t0,Tmax]
dt=2^-2; tt=t0:dt:Tmax;

20 %%% PARTIZIONE DELL'INTERVALLO SPAZIALE [x0,Xmax]
dx=2^-5; xx=0:dx:1; xx=xx';
partizione=length(xx);

25 %%% CONDIZIONE INIZIALE
y0=sin(pi*xx);

%%% SOLUZIONE ANALITICA
soluzione_vera=exp(-0.1*Tmax)*sin(pi*xx);

30 %%% COSTRUISCO M MATRICE DI MASSA
a(1)=dx/3; a(2:partizione-1)=(2*dx)/3; a(partizione)=dx/3;
b=(dx/6)*ones(partizione-1,1);
M=spdiag(a)+spdiag(b,1)+spdiag(b,-1);

35 %%% COSTRUISCO A MATRICE DI RIGIDEZZA
```

```

c(1)=1/dx; c(2:partizione-1)=2/dx; c(partizione)=1/dx;
d=-(1/dx)*ones(partizione-1,1);
A=mu*(spdiag(c)+spdiag(d,-1)+spdiag(d,1));
40
%%% IMPONGO LE CONDIZIONI DI DIRICHLET SULLA MATRICE DA INVERTIRE
B=M/dt+theta*A;
B(1,1)=1; B(1,2:end)=0; B(end,end)=1; B(end,1:end-1)=0;

45 tic

%%% CALCOLO L'INVERSA (CON L'ALGORITMO LU)
[L,U,P]=lu(B);
X=U\(L\(P));
50
%%% APPLICO IL THETA-METODO
for i=2:length(tt)
    noto=(M/dt)*y0-(1-theta)*A*y0+theta*FF(tt(i),xx,dx)+(1-theta)*FF(tt(i-1),xx,dx);
    noto(1)=0;
55     noto(end)=0;
    y0=X*noto;
end

toc

60 %%% ERRORE
err=norm(y0-soluzione_vera,inf)

plot(xx,y0,'*',xx,soluzione_vera)
65 grid on
legend('approssimata','reale')
print('pdeheat1d.eps','-depsc');

```

L'M file che definisce la parte non autonoma della EDP:

```

%
%
% [FF.m]
%
5
function y=FF(t,x,h)
    y=(-0.1+pi^2)*exp(-0.1*t)*sin(pi*x)*2*h/2;
return

```

L'output:

```

octave:1> pdeheat1d
Elapsed time is 0.02696 seconds.
err = 2.9240e-04

```

