

HLLC

SIMONE PARISOTTO

Supponiamo di essere nella situazione di voler risolvere il problema di avere un certo fluido, a velocità iniziale nulla, posto ad altezze diverse (per esempio, a causa della presenza di una diga verticale). Il problema, in forma conservativa, si può scrivere nel seguente modo (usiamo \mathbf{C} per coerenza con il codice GNU Octave scritto):

$$\mathbf{C}_t + \mathbf{F}(\mathbf{C})_x = 0$$

con

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{C})_x = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}$$

Essendo un'equazione iperbolica possiamo risolverla tramite flussi. Usiamo il metodo HLL:

$$\mathbf{C}_i^{n+1} = \mathbf{C}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n]$$

definendo:

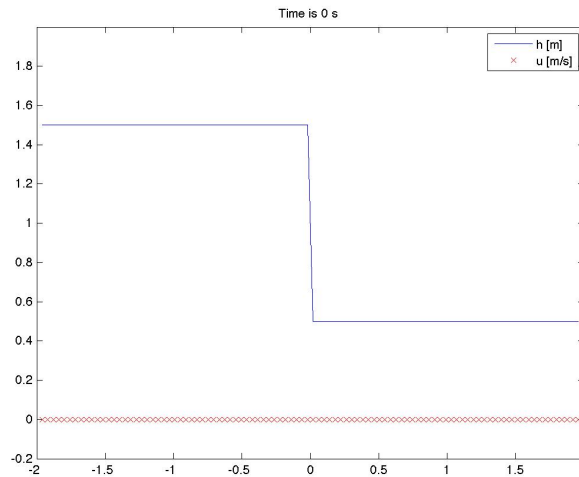
$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} F_L = F_i & \text{se } S_L \geq 0 \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{se } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R = F_{i+1} & \text{se } S_R \leq 0 \end{cases}$$

con

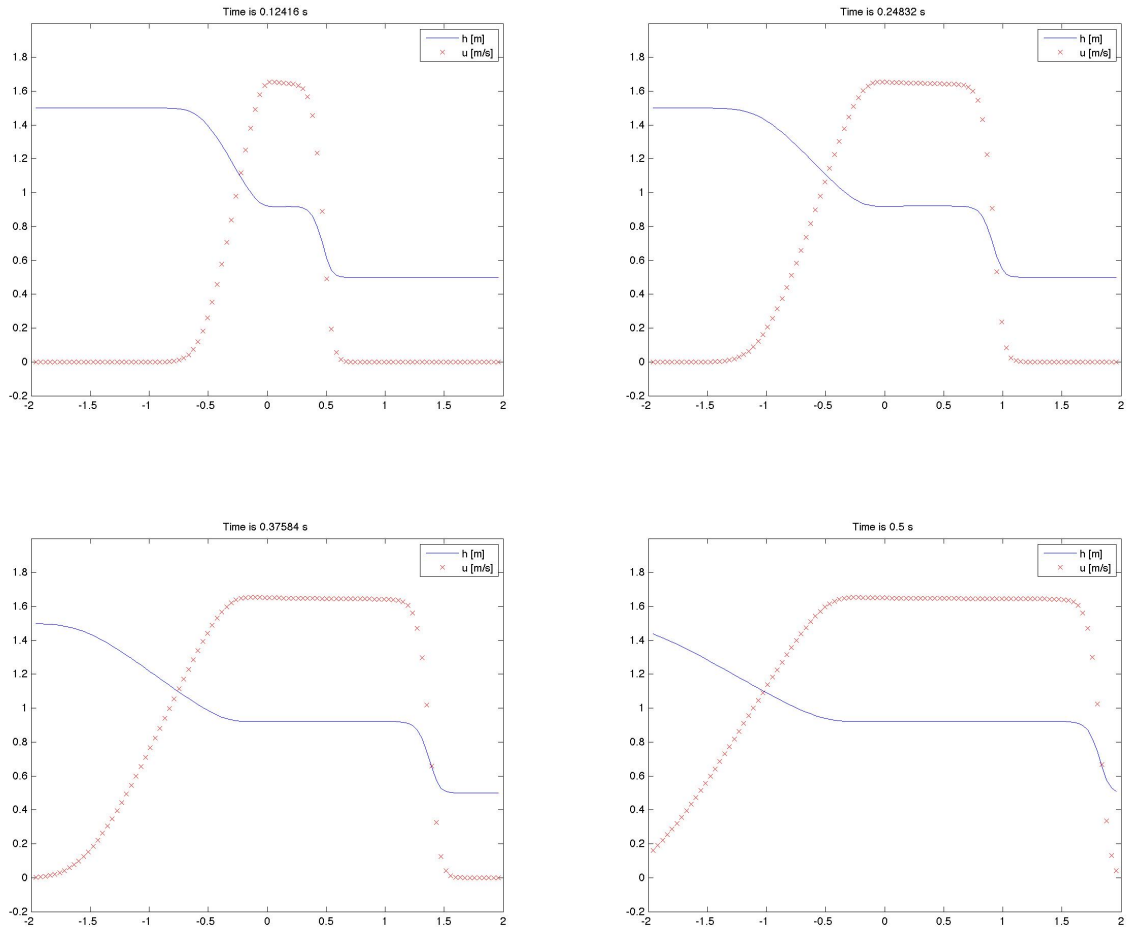
$$S_L = \min \left[u_i - \sqrt{gh_i}, u_{i+1} - \sqrt{gh_{i+1}} \right]$$

$$S_R = \max \left[u_i + \sqrt{gh_i}, u_{i+1} + \sqrt{gh_{i+1}} \right]$$

La nostra situazione iniziale era la seguente:



Come vediamo la variabile h (il tirante idrico) è discontinua nell'origine e vuole rappresentare la nostra diga all'istante $t = 0s$ (prima della rottura), mentre la velocità è nulla ovunque. Ad un certo punto, supponiamo che la diga si rompa e che si sviluppi un'onda, essendo il fluido non più vincolato dalla parete (ovviamente, la velocità del fluido aumenta). Di seguito abbiamo plottato lo scorrere del fluido a vari istanti temporali:



IL CODICE UTILIZZATO

Presentiamo qui sotto il codice utilizzato chiamato 'esercitazione3.m':

```

clear all
close all

% INTERVALLO SPAZIALE
5 space = [-2,2]; N = 100; Dx = (space(2)-space(1))./(N-1);
  x = space(1) : Dx : space(2);

% INTERVALLO TEMPORALE
  time = [0,0.5]; T = 150; Dt = (time(2)-time(1))/(T-1);
10 t = time(1) : Dt : time(2);

  g = 9.81; % Accelerazione di gravita\'

%----- CONDIZIONI INIZIALI -----
15 NS = N/2; % posizione dello shock

  U = zeros(1,N); % velocita\'
  UL = U(1:NS); UR = U(NS+1:end);

20 H = (1-sign(x))/2 + 0.5;
  HL = H(1:NS); HR = H(NS+1:end);

% PLOTTIAMO LA CONFIGURAZIONE INIZIALE

```

```

25 figure(1)
plot(x(2:end-1),H(2:end-1),'b',x(2:end-1),U(2:end-1),'rx')
axis([space(1) space(2) -0.2 2])
legend('h [m]', 'u [m/s]')
title(['Time is ', num2str(t(1)), ' s'])
30 print('hllstart.jpg', '-djpeg')
pause(0.01)

%----- INSIEME INIZIALE DI VARIABILI DA CONSERVARE -----
C = [ H;
35     H.*U ];

%----- METODO HLL PER RIEMANN -----

for timestep = 1:T
40
    %----- FLUSSO F -----
    F = [ H.*U;
          H.*(U).^2 + (g*(H).^2)/2 ];

45     for i = 1:N-1

        %----- CALCOLIAMO IL FLUSSO F_[i+1/2] -----
        SL = min([ U(i)-sqrt(g*C(1,i)), U(i+1)-sqrt(g*C(1,i+1)) ]);
        SR = max([ U(i)+sqrt(g*C(1,i)), U(i+1)+sqrt(g*C(1,i+1)) ]);

50         if SL >= 0
            FP(:,i) = F(:,i);

            else if SR <= 0
55             FP(:,i) = F(:,i+1);

                else
                    FP(:,i) = [ SR.*F(:,i) - SL.*F(:,i+1) + SL.*SR*(C(:,i+1)-C(:,i)) ]./(SR-SL);
                end
60         end

        % CONDIZIONE CFL
        if max(abs(SL),abs(SR))*Dt/Dx >= 0.9
            disp('CFL non soddisfatta')
65         end

    end

70 %-----AGGIORNAMO IL VETTORE DELLE VARIABILI CONSERVATE-----
    for i=2:N-1
        C(:,i) = C(:,i) + (Dt/Dx).*(FP(:,i-1)-FP(:,i));
    end

75 %----- AGGIORNAMO LE VARIABILI SIGNIFICATIVE -----
    H = C(1,:);
    U = C(2,:)./H;

    % PLOTTIAMO IL PASSO ESEGUITO
80     figure(1)
    plot(x(2:end-1),H(2:end-1),'b',x(2:end-1),U(2:end-1),'rx')
    axis([space(1) space(2) -0.2 2])
    legend('h [m]', 'u [m/s]')
    title(['Time is ', num2str(t(timestep)), ' s'])
85     pause(0.01)

```

```
% STAMPIAMO IN UN FILE IL GRAFICO A T/4
if timestep == round(T/4)
    print('hllquarter1.jpg','-djpeg')
90 end

% STAMPIAMO IN UN FILE IL GRAFICO A T/2
if timestep == round(T/2)
    print('hllmiddle.jpg','-djpeg')
95 end

% STAMPIAMO IN UN FILE IL GRAFICO A 3*T/4
if timestep == round(3*T/4)
    print('hllquarter3.jpg','-djpeg')
100 end

end

print('hllfinal.jpg','-djpeg')
```